BEBERAPA SIFAT IDEAL GELANGGANG POLINOM MIRING: SUATU KAJIAN PUSTAKA

AMIR KAMAL AMIR
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Hasanuddin 90245
Email : amirkamalamir@yahoo.com

INTISARI

Misalkan *R* adalah suatu gelanggang dengan elemen satuan 1, σ adalah suatu endomorfisme, dan δ adalah suatu $\sigma-$derivatif . Gelanggang polinom miring (*skew polynomial*) atas *R* dengan variabel *x* adalah gelanggang: $R[x;\sigma,\delta]=\{f(x)=a_n x^n+\cdots+a_0 \mid a_i \in R\}$ dengan aturan perkalian $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$. Penelitian ini akan mengidentifikasi ideal-ideal dari gelanggang polinom miring dalam hal $\delta=0$. Lebih jelasnya, akan didentifikasi hal-hal berikut: (1) ideal dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$; (2) ideal prim dari gelanggang polinom miring $K[x;\sigma]$; dan ideal $\sigma-$prim dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$.

Kata kunci: automorfisme, daerah integral, $\sigma-$prim.

SOME IDEAL PROPERTIES OF SKEW POLYNOMIAL RING: A LITERATURE STUDY

AMIR KAMAL AMIR
Mathematics Department, FMIPA, Hasanuddin University 90245
Email : amirkamalamir@yahoo.com

ABSTRACT

Let R be a ring with identity 1 and σ be an endomorphism of *R* and δ be a left $\sigma-$derivation. The skew polynomial ring over *R* in an indeterminate *x* is: $R[x;\sigma,\delta]=\{f(x)=a_n x^n+\cdots+a_0 \mid a_i \in R\}$ with $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$ The aim of this research is to investigate the ideals in the above skew polynomial ring in case of $\delta=0$. Precisely, we will investigate the following: (1) the ideal of skew polynomial ring $D[x;\sigma]$; (2) the ideal prim of skew polynomial ring $K[x;\sigma]$; and (3) the $\sigma-$prim ideal of skew polynomial ring $D[x;\sigma]$.

Keywords: automorphism, integral area, $\sigma-$prim.

1. PENDAHULUAN

Definisi dari gelanggang polinom miring (gelanggang takkomutatif) ini pertama kali diperkenalkan oleh Ore (1993) yang mengombinasikan ide awal dari Hilbert (kasus $\delta=0$) dan Schlessinger (kasus $\sigma=1$). Sejak kemunculan artikel dari Ore ini, gelanggang polinom miring telah memerankan peran yang penting dalam teori gelanggang takkomutatif dan telah banyak peneliti yang bergelut dalam teori gelanggang takkomutatif menginvestigasi bentuk gelanggang tersebut dari berbagai sudut pandang, seperti teori ideal, teori order, teori Galois, dan aljabar homologi.

Berikut diberikan definisi lengkap dari gelanggang polinom miring.

Definisi 1. Misalkan *R* adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisme dari *R*, dan δ adalah suatu $\sigma-$derivatif , yaitu:

(i). δ adalah suatu endomorfisme pada *R*, dengan *R* sebagai grup penjumlahan

(ii). $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$ untuk setiap $a,b\in R$.

Gelanggang polinom miring atas *R* dengan variabel *x* adalah gelanggang:

$$R[x;\sigma,\delta] = \{\ f(x)=a_n x^n + \cdots + a_0 \mid a_i \in R\ \}$$
dengan $xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R$.

Suatu elemen p dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ mempunyai bentuk kanonik

$$p = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i,\ r \in \mathbf{Z}_+ = \{0,1,\cdots\},\ a_i \in R,\ i = 1,\cdots,r.$$

Apabila $\sigma = 1$ atau σ adalah suatu endomorfisme identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\delta]$. Untuk hal $\delta = 0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\sigma]$. Sedangkan untuk kasus $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinom biasa. Dalam tulisan ini gelanggang R yang digunakan adalah gelanggang yang merupakan daerah integral komutatif dengan elemen satuan yang selanjutnya disimbolkan dengan ***D***.

Contoh 1. Misalkan $\mathbf{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. σ suatu endomorfisme pada $\mathbf{C}$ yang didefinisikan sebagai $\sigma(a+bi) = a - bi$, untuk setiap $a + bi \in \mathbf{C}$, dan $\delta = 0$. Akan ditunjukkan ketidak komutatifan dalam gelanggang polinom miring $\mathbf{C}[x;\sigma]$.

$$\begin{aligned}[(2+3i)x][(4+5i)x] &= (2+3i)[x(4+5i)]x \\ &= (2+3i)[\sigma(4+5i)x]x \\ &= (2+3i)(4-5i)x^2 = (23+2i)x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(4+5i)x][(2+3i)x] &= (4+5i)[x(2+3i)]x \\ &= (4+5i)[\sigma(2+3i)x]x \\ &= (4+5i)(2-3i)x^2 = (23-2i)x^2\end{aligned}$$

2. MASALAH DAN PEMBAHASAN

Masalah yang akan dibahas dalam bagian ini adalah mengidentifikasi bentuk-bentuk ideal dari berbagai bentuk gelanggang polinom miring. Secara mendetail, bentuk-bentuk ideal yang akan diidentifikasi adalah sebagai berikut:

1. ideal dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$;
2. ideal prim dari gelanggang polinom miring $K[x;\sigma]$;
3. ideal $\sigma-\text{prim}$ dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$.

Sekadar mengingat kembali, berikut ini disajikan definisi dari ideal dan ideal prim.

Definisi 2. Misalkan *R* adalah suatu gelanggang. Suatu himpunan bagian *I* dari *R* dikatakan suatu ideal kanan dari *R* jika :

1. $(I,+)$ adalah suatu grup bagian dari $(R,+)$,
2. xr berada dalam I untuk setiap x dalam I dan setiap r dalam R.

Suatu ideal kiri dari *R* didefinisikan serupa dengan ideal kanan. *I* dikatakan ideal dari *R* jika *I* merupakan ideal kanan dan sekaligus ideal kiri dari *R*. Selanjutnya suatu ideal *P* dari *R* dikatakan ideal prim jika dan hanya jika untuk setiap ideal-ideal *A*, *B* dari *R* implikasi berikut bernilai benar: Jika $AB \subseteq P$, maka $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$. Pernyataan terakhir ini ekuivalen dengan: jika $ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$.

2.1 Ideal dari Gelanggang Polinom Miring $R[x;\sigma,\delta]$

Teorema 1. *Misalkan D adalah suatu daerah integral komutatif yang bukan merupakan lapangan. Jika* $\sigma^n \neq 1$, *untuk semua bilangan asli n dan* $f(x)D[x;\sigma]$ *adalah suatu ideal dari* $D[x;\sigma]$, *maka f(x) = x.*

Bukti:

Misalkan $f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n$, dengan $f_i \neq 0$ untuk suatu $i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

(i). Akan tunjukkan bahwa $f_0 = 0$.

Karena $f(x) \in f(x)D[x;\sigma]$, diperoleh $af(x) \in f(x)D[x;\sigma],\ \forall a \in D$. Oleh karena itu terdapat $b \in D$ sedemikian sehingga

$$af(x) = f(x)b$$

atau

$$a\left(f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n\right) = \left(f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n\right)b.$$

Dari persamaan ini diperoleh $af_0 = f_0 b$ dan $af_i = f_i \sigma^i(b)$. Karena $f_i \neq 0$ diperoleh $a = \sigma^i(b)$, yang mengakibatkan $a \neq b$ sehingga $f_0 = 0$.

(ii). Sebagai kosekwensi dari (i), diperoleh $f(x) = f_1 x + \cdots + f_n x^n$, $(i.e.\ f_0 = 0)$.

Selanjutnya akan tunjukkan bahwa $f_1 \neq 0$.

Andaikan bahwa $f_1 = 0$, maka

$$f(x) = f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n \in f(x)D[x;\sigma].$$

Dari sini diperoleh,

$$f(x)=f_2x^2+\cdots+f_nx^n=x\left[\sigma^{-1}(f_2)x+\cdots+\sigma^{-1}(f_n)x^{n-1}\right]\in f(x)D[x;\sigma],$$

dengan $x \notin f(x)D[x;\sigma]$ dan

$$\left[\sigma^{-1}(f_2)x+\cdots+\sigma^{-1}(f_n)x^{n-1}\right]\notin f(x)D[x;\sigma].$$

Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $f(x)D[x;\sigma]$ adalah ideal prim.

(iii). Akan tunjukkan bahwa $f_i=0,\ \forall i>1$.

Andaikan terdapat suatu $k>1$ sedemikian sehingga $f_k\neq 0$. Misalkan $t>1$ adalah bilangan terkecil sedemikian sehingga $f_t\neq 0$.

Dari persamaan

$$a\left(f_1x+\cdots+f_nx^n\right)=\left(f_1x+\cdots+f_nx^n\right)b,$$

pada bagian (i) diperoleh $af_1=f_1\sigma(b)$ dan $af_t=f_t\sigma^t(b)$. Karena $f_1\neq 0$ dan $f_t\neq 0$, maka $a=\sigma^{t-1}(a)$. Hal ini kontradiksi dengan $\sigma^n\neq 1$ untuk semua bilangan asli *n*.

(iv). Sekarang dipunyai $f(x)=f_1x$. Akan ditunjukkan bahwa $f_1=1$.

Andaikan $f_1\neq 1$. Karena *D* adalah bukan sautu lapangan, maka dapat dipilih suatu $b\in D$ sedemikian sehingga

$$bx\notin f_1xD[x;\sigma]=f(x)D[x;\sigma].$$

Jelas bahwa

$$f_1\notin f(x)D[x;\sigma]$$

dan

$$bx\notin f(x)D[x;\sigma]$$

tetapi $f_1.bx=f_1x.\sigma^{-1}(b)\in f(x)D[x;\sigma]$.

Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $f(x)D[x;\sigma]$ adalah suatu ideal prim. Bagian (i) sampai (iv) melengkapi bukti teorema.■

Lema 1. *Misalkan* $\Lambda=D[x;\sigma]$ *adalah suatu gelanggang polinom miring dan A adalah ideal dari* Λ. $A\cap D=\{0\}$ *jika dan hanya jika* $AK[x;\sigma]$ Ø $K[x;\sigma]$, *dalam hal ini K adalah lapangan pembagian dari D.*

Bukti:

(i). Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa: jika $A\cap D=\{0\}$, maka $AK[x;\sigma]$ Ø $K[x;\sigma]$.

Sudah jelas bahwa $AK[x;\sigma]\subseteq K[x;\sigma]$, jadi tinggal ditunjukkan bahwa $AK[x;\sigma]\neq K[x;\sigma]$, yaitu terdapat $g(x)\in K[x;\sigma]$ sedemikian sehingga $g(x)\notin AK[x;\sigma]$. Pilih $g(x)=d\in D,\ d\neq 0$. Karena $A\cap D=\{0\}$, maka $d\notin AK[x;\sigma]$ sehingga $g(x)\notin AK[x;\sigma]$.

(ii). Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa: jika $AK[x;\sigma]$ Ø $K[x;\sigma]$, maka $A\cap D=\{0\}$.

Andaikan $A\cap D\neq\{0\}$ berarti terdapat $d\in D,\ d\neq 0$. Ini berarti $1=dd^{-1}\in AK[x;\sigma]$ yang mengakibatkan $AK[x;\sigma]=K[x;\sigma]$ karena $AK[x;\sigma]$ adalah suatu ideal dalam $K[x;\sigma]$. Hal ini kontradiksi dengan $AK[x;\sigma]$ Ø $K[x;\sigma]$.■

Teorema 2. *Misalkan P adalah ideal prim minimal dari* $\Lambda=D[x;\sigma]$ *dan K adalah lapangan hasil bagi dari D, maka* $PK[x;\sigma]$ *adalah ideal prim dari* $K[x;\sigma]$.

Bukti:

(i). Akan ditunjukkan bahwa $PK[x;\sigma]$ ideal.

Misalkan $g(x)\in PK[x;\sigma]$ dan $h(x)\in K[x;\sigma]$. Untuk membuktikan bahwa $PK[x;\sigma]$ adalah ideal, maka akan ditunjukkan bahwa $h(x)g(x)\in PK[x;\sigma]$ dan $g(x)h(x)\in PK[x;\sigma]$. Karena $g(x)\in PK[x;\sigma]$ berarti

$g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(x)$ dengan $a_i(x)\in P$ dan $b_i(x)\in K[x;\sigma]$. Karena $h(x)\in K[x;\sigma]$ dan *K* adalah lapangan hasil bagi dari *D*, maka dapat ditemukan $d\in D,\ d\neq 0$ sedemikian sehingga $dh(x)\in D[x;\sigma]$. Selanjutnya, dengan alasan yang sama dapat ditemukan juga $e\in D,\ e\neq 0$ sedemikian sehingga

$$dh(x)a_i(x)e^{-1}b_i(x)=h(x)a_i(x)b_i(x),$$

sehingga diperoleh

$$h(x)g(x)=h(x)\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(x)=\sum_{i=1}^{n}dh(x)a_i(x)e^{-1}b_i(x)$$

.

Karena $dh(x)\in D[x;\sigma]$, $a_i(x)\in P$, *P* adalah ideal dari $D[x;\sigma]$, dan $e^{-1}b_i(x)\in K[x;\sigma]$, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$h(x)g(x)=\sum_{i=1}^{n}dh(x)a_i(x)e^{-1}b_i(x)\in PK[x;\sigma].$$

Pada sisi lain,

$$g(x)h(x)=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(x)\right]h(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(x)h(x)\in PK[x;\sigma]$$

, karena $a_i(x)\in P$ dan $b_i(x)h(x)\in K[x;\sigma]$.

(ii). Akan ditunjukkan bahwa $PK[x;\sigma]$ prim

Untuk menunjukkan hal ini, akan ditunjukkan bahwa jika $g(x)h(x) \in PK[x;\sigma]$, maka $g(x) \in PK[x;\sigma]$ atau $h(x) \in PK[x;\sigma]$.

Karena $g(x)h(x) \in PK[x;\sigma]$, maka dapat dimisalkan $g(x)h(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)k_i(x)$, dengan $p_i(x) \in P$ dan $k_i(x) \in K[x;\sigma]$ untuk suatu n bilangan asli. Karena K adalah lapangan hasil bagi dari D, maka untuk setiap i terdapat $d_i \in D$ sedemikian sehingga $d_i k_i(x) \in D[x;\sigma]$. Oleh karena itu, $p_i(x)d_i k_i(x) \in P$ karena P adalah ideal prim dari $D[x;\sigma]$. Dari sini sudah dapat disimpulkan bahwa terdapat $0 \neq d \in D$ sedemikian sehingga

$$d\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(x)k_i(x)\right] \in P.$$

Sehingga

$$dg(x)h(x) = d\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(x)k_i(x)\right] \in P.$$

Selanjutnya, andaikan $g(x) \notin PK[x;\sigma]$ dan $h(x) \notin PK[x;\sigma]$, maka $g(x) \notin P$ dan $h(x) \notin P$. Dengan demikian $g(x)h(x) \notin P$, karena P ideal prim. Mengingat P ideal prim, $dg(x)h(x) \in P$, dan $g(x)h(x) \notin P$, maka $d \in P$ yang berarti bahwa $P \cap D = \{0\}$. Hal ini kontradiksi dengan Lema 1. ■

2.2 Ideal $\sigma-$prim dari Gelanggang Polinom Miring $R[x;\sigma,\delta]$

Definisi 3. Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ adalah suatu gelangang polinom miring. Suatu $\sigma - ideal$ dari R adalah suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $\sigma(I) \subseteq I$. Suatu $\sigma - ideal$ *prim* (atau $\sigma - prim$) adalah suatu $\sigma - ideal$ murni I dari R sedemikian sehingga jika J, K adalah $\sigma - ideal$ yang memenuhi $JK \subseteq I$, maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$. Dalam kasus 0 adalah suatu $\sigma - prim$ ideal dari R, dikatakan R adalah suatu gelanggang $\sigma - prim$.

Teorema 3. *Misalkan σ adalah suatu automorfisme dari gelanggang R, dan misalkan I adalah suatu ideal murni dari R sedemikian sehingga $\sigma(I) = I$. I adalah $\sigma - prime$ jika dan hanya jika untuk sembarang $a, c \in R - I$, terdapat $b \in R$ dan $t \in \mathbf{Z}$ sedemikain sehingga $ab\sigma^n(c) \notin I$.*

Bukti:

$\Leftarrow$

Misalkan A, C adalah $\sigma - ideal$ yang tidak berada dalam ideal I. Pilih elemen-elemen $a \in A - I$ dan $c \in C - I$, maka terdapat $b \in R$ dan $t \in \mathbf{Z}$ sedemikian sehingga $ab\sigma^t(c) \notin I$.

Kasus 1. Jika $t \geq 0$, maka $\sigma^t(c) \in C$ sehingga dari $ab\sigma^t(c) \notin I$ diperoleh $AC \not\subset I$.

Kasus 2. Jika $t < 0$, maka dari $ab\sigma^t(c) \notin I$ diperoleh $\sigma^{-t}(a)\sigma^{-t}(b)c \notin \sigma^{-t}(I) = I$. Dalam kasus ini, $\sigma^{-t}(a) \in A$ sehingga $AC \not\subset I$.

Dari kasus 1 dan 2 disimpulkan bahwa I adalah suatu ideal $\sigma - prime$.

$\Rightarrow$

Misalkan I adalah $\sigma - prime$ dan $a, c \in R - I$. Himpunan-himpunan

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} R\sigma^i(a)R$$

dan

$$C = \sum_{j=0}^{\infty} R\sigma^j(c)R$$

adalah $\sigma - ideal$ yang tidak berada dalam ideal I, sehingga $AC \not\subset I$.

Konsekuensinya, $\sigma^i(a)b\sigma^j(c) \notin I$ untuk suatu $i, j \geq 0$, sehingga $a\sigma^{-i}(b)\sigma^{t-i}(c) \notin I$. □

Teorema 4. *Misalkan M adalah suatu idel maksimal dari $D[x;\sigma]$ dengan $M \cap D \neq \{0\}$. Jika $x \notin M$, maka $M \cap D$ adalah suatu ideal $\sigma - prime$.*

Bukti:

(i). Jelas bahwa $M \cap D$ adalah suatu ideal

(ii). Akan ditunjukkan bahwa $M \cap D$ adalah $\sigma - ideal$ dengan jalan menunjukkan bahwa $\sigma(M \cap D) \subseteq M \cap D$. Ambil $a \in M \cap D$ dan andaikan $\sigma(a) \notin M \cap D$, maka $\sigma(a) \notin M$, karena $\sigma(a) \in D$. Dengan demikian $\sigma(a)x \notin M$ yang berarti $xa \notin M$. Kontradiksi dengan M adalah suatu ideal.

(iii). Akan ditunjukkan bahwa $M \cap D$ adalah $\sigma - prime$.

Misalkan J dan,K adalah $\sigma - ideal$ dari D dan $JK \subseteq M \cap D$, maka akan ditunjukkan bahwa $J \subseteq M \cap D$ atau $K \subseteq M \cap D$ atau sama dengan menunjukkan bahwa jika $J \not\subset M \cap D$, maka $K \subseteq M \cap D$. Ambil $k \in K$ dan pilih $j \in J$ tetapi $j \notin M \cap D$. Ini berarti $j \notin M$. $jk \in JK \subseteq M \cap D$, maka $jk \in M$. Karena $j \notin M$ dan M adalah ideal prim (ideal maksimal pasti merupakan ideal prim), maka $k \in M$. Sehingga diperoleh $k \in M \cap D$. Hal ini membuktikan bahwa $K \subseteq M \cap D$. ■

3. SIMPULAN

Dari paparan di atas dapat ditarik simpulan bahwa:

1. dalam kondisi $\sigma^n \neq 1$, ideal dari $D[x;\sigma]$ berbentuk $xD[x;\sigma]$;
2. salah satu bentuk ideal prim dari gelanggang polinom miring $K[x;\sigma]$ adalah $PK[x;\sigma]$, dengan P adalah ideal prim minimal;
3. salah satu bentuk ideal $\sigma - prime$ dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$ adalah berbentuk $M \cap D$ dengan M adalah maksimal ideal dari $D[x;\sigma]$ yang tidak memuat x.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Prof. Hidetoshi Marubayashi, Tokushima Bunry University, Japan atas masuk-masukan yang telah diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

Ore, O. 1933.Theory of Non-Commutative Polynomials. *Annals of Mathematics*. **34:** 480—508.